

UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

HUSE FATKIĆ
AZEM DAUTOVIĆ
NARCIS BEHLILOVIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA ELEKTROTEHNIČKOM FAKULTETU



SARAJEVO, 1998.

HUSE FATKIĆ
AZEM DAUTOVIĆ
NARCIS BEHLILOVIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA ELEKTROTEHNIČKOM FAKULTETU



SARAJEVO, 1998.

Izdavač: **Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Sarajevu**

Skenderija 70, Sarajevo

Tel.: 657-039, 654-972, 654-938

Fax: 654-972

Za izdavača:

Prodekan za nastavu - **Doc. dr Melita Ahić - Đokić**, dipl. el. ing.

Urednik, lektor i korektor:

Huse FATKIĆ, ETF Sarajevo

Slog i prelom na računaru:

Muamer KAFADAR, student ETF-a Sarajevo

Tehnički urednik:

Muhamed KAPETANOVIĆ, ETF Sarajevo

S A D R Ž A J

I. ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA IZ MATEMATIKE NA ELEKTROTEHNIČKOM FAKULTETU UNIVERZITETA U SARAJEVU

1.1. Kvalifikacioni ispit od 26. 6. 1989.

1. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$-skup realnih brojeva). Odrediti brojeve a, b, c tako da budu zadovoljena slijedeća dva uslova:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \quad (\forall x, y \in \mathbf{R})$;

b) $f(x) \geq 0, \quad (\forall x \in \mathbf{R})$.

2. Za koje vrijednosti realnog parametra t sistem jednačina

$$2^{|x|} + \log(10^{|x|} t^2) = x^2 + y, \quad x^2 + y^2 = 1$$

ima jedno i samo jedno rješenje.

3. Niz brojeva:

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=10,\ a_4=19,\ \ldots$$

ima osobinu da razlike $a_{i+1}-a_i$ ($i=1, 2, \ldots$) obrazuju aritmetičku progresiju. Naći deveti član (tj. a_9) i sumu prvih devet članova datog niza.

4. Data je jednačina

$$\sin\frac{2\pi x}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)^{k-1}, \quad (k\in\mathbf{Z}), \qquad (1)$$

($\mathbf{Z}$-skup cijelih brojeva).

a) Pokazati da se jednačina (1) svodi na:

$$2x\,(x^2+x+1)^{-1} = m - \frac{1}{3}, \quad (m = k + 2p,\ p \in \mathbf{Z}) \qquad (2)$$

ili

$$2x(x^2+x+1)^{-1} = n + \frac{4}{3}, \quad (n = 2p - k,\ p \in \mathbf{Z}). \qquad (3)$$

b) Riješiti jednačinu (2).

5. Strane trougla ABC leže na pravcima:

$$2x - 3y + 6 = 0,\ 3x + 2y - 12 = 0,\ 4x - y + 8 = 0.$$

a) Odrediti koordinate vrhova datog trougla.

b) Naći sve tačke $M(x, y)$ unutar datog trougla, pri čemu su x, y cijeli brojevi.

1. 2. Kvalifikacioni ispit od 11. 7. 1989.

1. Data je funkcija $f(x)=mx^2+(m-1)x+m-1$, ($m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, **R**-skup realnih brojeva).

a) Za koje vrijednosti parametra m data funkcija f ima dvije realne nule x_1 i x_2?

b) Ako su x_1 i x_2 nule date funkcije f, ne rješavajući pripadnu kvadratnu jednačinu, naći izraz:

$$\varphi(m) = x_2^2 \cdot \left(\frac{x_1^2}{x_2} - x_2\right) + x_1^2 \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} - x_1\right).$$

c) Odrediti sve vrijednosti parametra m za koje je $\varphi(m) > 0$.

2. Naći sve vrijednosti $t\in\mathbf{R}$ za koje jednačina

$$|t^2x + 1| + |t^3 + t^2x| = t^2x + 1 - (t^3 + t^2x)$$

ima najmanje četiri (različita) rješenja po nepoznatoj x u skupu cijelih brojeva.

3. Naći sve uređene parove (m, n) prirodnih brojeva m i n za koje je sistem jednačina

$$x \cdot \log_2(10-m) + 3y = 5 \cdot \log_2(9-n) \quad \wedge \quad x + y = 5$$

a) neodređen;
b) protivrječan;
c) jednoznačno rješiv.

4. Riješiti sistem jednačina

$$2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$4\cos\alpha \cdot \cos\beta = \sqrt{3}.$$

5. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra α za koje jednačina

$$\cos\alpha \cdot \log_t^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \log_t x + \frac{\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha} = 0, \quad (0 < t < 1),$$

ima sva rješenja (po nepoznatoj x) u intervalu (0, 1).

1. 3. Kvalifikacioni ispit od 5. 9. 1994.

1. Dat je izraz :

$$A = \left(\frac{5}{a^2 - 2a - ax + 2x} - \frac{1}{8 - 8a + 2a^2} : \frac{x-2}{20-10a}\right) : \frac{25}{x^3 - 8}.$$

a) U datom izrazu izvršiti naznačene operacije i svesti ga na najjednostavniji oblik.

b) Odrediti sve realne brojeve x za koje je dati izraz definisan.

2. Riješiti jednačinu

$$|2x - \sin\alpha| + |\cos\alpha + 1 - x| = x + 1$$

za razne vrijednosti realnog parametra α.

3. Dat je pravougli trougao čije su katete a i b. Pravi ugao tog trougla podijeljen je polupravima q i p na tri jednaka dijela. Izračunati dužine ovih dijelova polupravih p i q koji se nalaze u datom trouglu.

4. Odrediti najveću i najmanju vrijednost izraza $A = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ na kružnici čija je jednačina (u kompleksnoj ravni) $|z| = 2$, uzimajući trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

5. Dvanaest kruhova treba podijeliti na dvanaest osoba među kojima ima odraslih muškaraca, odraslih žena i djece. Svaki odrasli muškarac treba dobiti dva kruha, odrasla žena pola kruha, a dijete četvrtinu kruha. Koliko je u tom slučaju bilo odraslih muškaraca, odraslih žena i djece?

1. 4. Kvalifikacioni ispit od 8. 9. 1995.

1. Neka je $f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3} - x + 2\right) : \left(\frac{2x^2 + 12x + 18}{x^3 - t x^2 + 9x}\right)^{-1}$.

a) Odrediti sve realne brojeve x za koje je dati izraz f(x) definisan ($t \in \mathbf{R}$).

b) U datom izrazu izvršiti sve naznačene operacije i svesti ga na najjednostavniji oblik.

c) Odrediti vrijednost realnog parametra "t" tako da vrijedi (identitet):

$$f(x) \equiv \frac{6(x+3)}{x(3-x)}.$$

2. Date su funkcije

$$f(x) = a^x,\ g(x) = b^x,\ (a,b \in \mathbf{R}).$$

a) Odrediti definiciono područje funkcije f.

b) Za $a = 4$, $b = \sqrt[3]{2}$, uporedi po veličini brojeve

$$f\left(\tfrac{201}{4}\right),\ g(201).$$

c) Za $a = 3$, $b = 5$ riješiti nejednačinu

$$21\, f(x) + 100\, g(x) - f(x+4) < 0.$$

d) Za $a = 1995$ ustanoviti koji je od brojeva veći

$$\frac{f(1996)+1}{f(1997)+1} \text{ ili } \frac{f(1994)+1}{f(1995)+1}.$$

3. Riješiti trougao ako je poznato $b=9$; $c=16$, i ako je $\angle A$ dva puta veći od $\angle B$, zatim naći mu površinu i obim.

4. Na intervalu $(0,2\pi)$ naći sva rješenja jednačine

$$\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

5. U ravnoj xOy data je prava jednačinom $x+y=10$ i elipsa čija je jednačina $x^2+4y^2=4$.

a) Ispitati međusobni položaj date prave i date elipse.

b) Naći najkraće rastojanje date prave od date elipse.

c) Koje su tačke na elipsi i pravoj najbliže?

1. 5. Kvalifikacioni ispit od 4. 10. 1995.

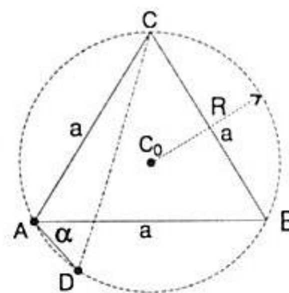
1. Za koje se realne vrijednosti parametra "a" jedno i samo jedno rješenje jednačine

$$(a+1)x^2 - (a^2+a+6)x + 6a = 0$$

nalazi u intervalu (0,1)?

2. Na Sl. 1. je prikazan istostranični trougao ABC stranice "a" i oko istog je opisana kružna linija, radijusa "R", na kojoj se nalazi tačka D.

Ako je $\overline{AD} = 1$, $\alpha = 45°$, odrediti "a", R, i $\overline{CD}$.



Sl. 1.

3. Data je parabola (P) jednačinom $y=x^2+2$ i data je prava (p) čija je jednačina $y=x$ (U pravouglom *Descartesovom* koordinatnom sistemu Oxy).

a) Ispitati međusobni položaj date prave (p) i date parabole (P);

b) Odrediti tačku A na paraboli (P) koja je najbliža pravoj (p);

c) Naći tačku B na pravoj (p) koja je najbliža tački A.

4. Riješi jednačinu:

$$x^{\log^2 x + \log x^3 + 3} = \frac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

5. Za koje realne vrijednosti parametara α, β jednačina :

$$\sin 2x + \alpha \cdot \cos 2x - \sin x - \cos x + \beta = 0$$

ima rješenja $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$?

Za tako određene vrijednosti α, β naći ostala rješenja date jednačine na otvorenom intervalu $(0, 2\pi)$.

1. 6. Kvalifikacioni ispit od 29. 7. 1996.

1. Na šahovskom turniru je učestvovalo osam šahista. Tokom turnira svaki od učesnika je odigrao po jednu šahovsku partiju sa ostalim učesnicima turnira (po sistemu svako sa svakim).

Po okončanju turnira utvrđeno je da su svih osam učesnika osvojili različit broj poena. Uz to šahist koji je zauzeo drugo mjesto na turniru, osvojio je jednak broj poena kao i četvorica zadnjeplasiranih učesnika zajedno. Koliko je poena osvojio drugoplasirani učesnik, a kakav je međusobni skor između trećeplasiranog i petoplasiranog učesnika?

2. Neka su $A=\dfrac{a\cdot b}{a^5+b^5+ab}$, $B=\dfrac{b\cdot c}{b^5+c^5+bc}$, $C=\dfrac{c\cdot a}{c^5+a^5+ac}$.

a) Odrediti sve realne brojeve a, b, c za koje je izraz

$$(A:B)\cdot\left(C:\frac{(a^3-\alpha a^2+9a)(c^5+a^5+ac)^{-1}}{2a^2+12a+18}\right),\ (\alpha\in\mathbf{R}),\ \text{definisan.}$$

Zatim ga svesti na najjednostavniji oblik.

b) Dokazati da je $A+B+C\leq 1$.

3. Stranice trougla su tri uzastopna člana rastuće aritmetičke progresije. Ako je površina tog trougla $P=24\ cm^2$, a radijus upisanog kruga $\rho=2$ cm, odrediti koji je to trougao. Koliki je radijus opisanog kruga dobijenog trougla? U tako određen trougao upisati pravougaonik maksimalne površine, kojem je jedna stranica na najvećoj stranici trougla. Pokazati da je $P_\triangle:P_\square=2:1$.

4. U xOy ravni su date jednačine kružnice i prave:

$$x^2+y^2-4x-9y+12=0,\ y=x+3.$$

Odrediti tačke A i B na datoj pravoj iz koje se data kružnica vidi pod uglom od $60°$. Iz koje tačke D, na pravoj, se vidi kružnica pod maksimalnim uglom i koliki je taj ugao?

5. a) Naći sva rješenja sistema jednačina:

$$\sin x+2\sin(x+y+z)=0,\ \sin y+3\sin(x+y+z)=0,\ \sin z+4\sin(x+y+z)=0.$$

b) Riješiti nejednačinu:

$$(2x-\sin t)\cdot(1-x+\cos t)\cdot(\log_{0.75}\sin x-\log_{\frac{9}{16}}0.75)>0,\ \ (t=\frac{\pi}{4}+k\pi),\ (k\in\mathbf{Z}).$$

1. 7. Kvalifikacioni ispit od 20. 9. 1996.

1. Dešifrovati relaciju sabiranja UDAR+UDAR=DRAMA, gdje istim slovima odgovaraju iste, a različitim slovima različite cifre.

2. Riješiti sistem jednačima:

$$10^{-\log(x-y)} = 3^{-2},$$

$$\sqrt{x-y} - \frac{1}{3}\sqrt{x+y} = \frac{4-y}{\sqrt{x-y}}.$$

3. Naći sva rješenja jednačine

$$\sin 2x + \sin x = -1 - \cos x - \cos 2x.$$

koja pripadaju intervalu $(0, \pi)$.

4. Date su jednačine kružnice i pravca: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$, $x+y=3$.

a) Odrediti tačke A i B na datom pravcu iz kojih se data kružnica vidi pod uglom od $60°$.

b) Odrediti jednačinu parabole, oblika $y=x^2 - 6x + \alpha$, za $y>2$, koja ima samo jednu tačku D iz koje se data kružnica vidi pod uglom od $60°$.

c) Ako su x_A i x_B dobiveni pod a) i b) nule funkcije $f(2x+1)$, odrediti nule funkcije $f(|3 - |2 - x||)$.

5. Riješiti jednačine:

a) $\dfrac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \dfrac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}$, za razne vrijednosti realnog parametra a,

b) $(\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x)(2 + \sin y) = 2$.

1. 8. Kvalifikacioni ispit od 16. 7. 1997.

1. Dati su (u skupu **R** realnih brojeva) izrazi:

$$A(x)=\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right):\left(\frac{x}{x+a}-\frac{a}{a-x}\right),\ B(x)=\sqrt{(-x)^2}+\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}-|x-11|.$$

a) Odrediti definiciono područje datih izraza.

b) Svesti dati izraz A(x) na najjednostavniji oblik.

c) Izračunati vrijednost izraza $C(x)=20\cdot A(x)-B(x)$ za $x=5$, $a=4$.

d) Nacrtati grafik funkcije date sa $y=B(X)$.

2. Relacija $3x15=51$, očigledno, ne vrijedi u decimalnom brojnom sistemu. Treba naći osnovu brojnog sistema u kojem je data relacija ispravna, pa potom u tom sistemu odrediti koliko je $13x6$. (Simbol x je znak množenja, a dati brojevi su napisani u brojnom sistemu sa odgovarajućom osnovom.)

3. Kod trougla, sa stranicama a, b, c, te poluprečnikom upisanog kruga q i poluprečnikom opisanog kruga R, vrijedi :

$$a:b:c:R=3:4:5:u,\quad q=2,\ (u\in \mathbf{R}).$$

Odrediti koji je to trougao, a zatim u taj trougao upisati pravougaonik maksimalne površine, ako mu je jedna stranica na najvećoj stranici trougla.

4. Naći sva rješenja jednačine:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=2.$$

5. Iz familije kružnica datih jednačinom

$$x^2+y^2-8x-6y=\alpha,\quad (\alpha\in \mathbf{R}),$$

izdvojiti onu kružnu liniju, koja se iz tačke (0, 0) vidi pod uglom od 60°.

1. 9. Kvalifikacioni ispit od 16. 9. 1997.

1. a) Riješiti logaritamsku jednačinu:

$$\log(x-1)-\log(4-x)=\log\left(\frac{x}{4}\right)$$

b) Za koje α ($\alpha \in \mathbf{R}$) jednačina

$$\log(x-1)-\log(4-x)=\log x+\log\alpha$$

ima dva realna rješenja (**R** - skup realnih brojeva)?

2. Odrediti ugao između tangenti povučenih iz tačke A(2, 1) na kružnicu:

$$x^2+y^2=1.$$

3. Koji su od sljedećih brojeva parni, a koji neparni:

$$110_{(2)},\ 1011_{(2)},\ 2012_{(3)},\ 1021_{(3)},\ 2013_{(4)},\ 112_{(4)},\ 42_{(5)},\ 103_{(5)}?$$

(Navedeni brojevi su zadati sa bazom označenom u indeksu.)

4. a) Rastaviti na faktore polinom $a^3+b^3+c^3-3abc$.

b) Ako je $a+b+c=0$, dokazati da vrijedi jednakost:

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

c) Dokazati da je izraz

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

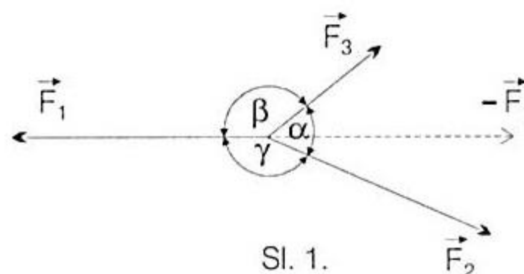
nenegativan za sve realne brojeve a, b, c.

d) Dokazati da je $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ za sve nenegativne realne brojeve a, b, c, pa odatle zaključiti da je

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}$$

za sve nenegativne realne brojeve x, y, z.

5. Na istu tačku u ravni djeluju tri sile (različitih) intenziteta, $F_1=100$ N, $F_2=60$ N, $F_3=47$ N, ali tako da su međusobno uravnotežene. Treba odrediti uglove između tih sila, prema slici 1.



Sl. 1.

II. RAZNI ZADACI*

1. Cifre trocifrenog broja x y z čine aritmetički rastući niz čiji je zbir 12. Ako trećoj cifri dodamo prvu cifru tada ta nova tri broja čine rastući geometrijski niz. Koji je to trocifren broj ?

2. Data je jednačina kružne linije $x^2 + y^2 = 25$. U tački A $(3, y_0)$, $y_0 > 0$, koja je na kružnoj liniji, odrediti jednačine tangente i normale a zatim odrediti tačku B (x_1, y_1), $y_1 < 0$, na kružnoj liniji koja je najudaljenija od pravca normale.

3. Odrediti najmanju vrijednost izraza $\left|z - \frac{1}{z}\right|$ (z-kompleksan broj), ako je $|z| = 2$.

4. Ako je za neki kompleksni broj z

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha,$$

nađi sumu $z^n + \frac{1}{z^n}$ u zavisnosti od cosinus ugla za bilo koji cijeli broj n.

5. Odrediti kompleksne brojeve z, koji zadovoljavaju sljedeće uslove

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{i} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

6. Na nogometnom turniru su se svake dvije ekipe sastale samo jednom. Po završetku turnira prvoplasirana ekipa je osvojila 7 bodova, drugoplasirana 5, a trećeplasirana 3 boda. Koliko je ekipa sudjelovalo na tom turniru? (Pobjeda vrijedi 2 boda.)

---

* *Odabrani zadaci* sa kvalifikacionih ispita i *neki zadaci* koji su predlagani na kvalifikacionim ispitima na Elektrotehničkom fakultetu i drugim tehničkim fakultetima Univerziteta u Sarajevu.

7. Težišnice AD i BE trouglova ABC su međusobno normalne. Naći sve moguće vrijednosti kosinusa ugla $\angle ACB$ tog trougla.

8. Odrediti koliko rješenja imaju sistemi :

a)
$$\cos x_1 = x_2$$
$$\cos x_2 = x_3$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\cos x_{n-1} = x_n$$
$$\cos x_n = x_1$$

b)
$$\sin x_1 = x_2$$
$$\sin x_2 = x_3$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\sin x_{n-1} = x_n$$
$$\sin x_n = x_1.$$

Odgovor obrazložiti.

9. Data je familija F podskupova n-elementnog skupa X sa osobinom $\forall A,B \in F$ vrijedi $A \cap B \neq \varnothing$. Koliko najviše elemenata može biti u F?

10. Ekspert na sudu hoće da dokaže da je od 14 moneta 7 neispravnih (on zna koje su). Sud zna da su sve neispravne monete jednake težine a takođe i ispravne i da su neispravne lakše od ispravnih. Ekspert želi da sa tri mjerenja na vagi bez tegova dokaže sudu koje su monete neispravne. Može li on to učiniti?

11. Naći sve brojeve kojima se može skratiti razlomak
$$\frac{8k+7}{5k+6}$$
za cijele k.

12. Neka su x, y pozitivni brojevi, S najmanji među brojevima x, $y + \frac{1}{x}\frac{1}{y}$. Naći najveću moguću vrijednost od S. Za koje x, y se ona postiže?

13. Dokazati da se izraz
$$f(t) = 4t^4 + 16t^3 + 24t^2 + 16t + 5$$
može rastaviti na faktore.

14. Ako su α, β, γ uglovi trougla, dokazati da je $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$.

15. Ako su t_a i t_b težišnice a S površina trougla, dokazati da je onda
$$t_a t_b \geq \frac{3}{2} S.$$

16. Riješiti jednačinu $x + \sqrt{t + \sqrt{x}} = t$ za:

1) $t=3$,

2) $t>3$.

17. Riješiti po x jednačinu $\log_a x = \frac{x}{a}$.

18. Osnova piramide je jednakokraki trougao s bočnom stranicom *a* i uglom α na osnovici ($\alpha > 45°$). Bočne ivice piramide su nagnute prema ravni osnove pod uglom β. Naći površinu presjeka te piramide sa ravni koja prolazi kroz visinu piramide i vrh jednog od uglova α.

19. Na šahovskom turniru gdje je svaki učesnik igrao sa ostalim učesnicima, bodovi koje su osvojili takmičari predstavljaju aritmetički niz. Koliko je bodova osvojio prvoplasirani ako je posljednji osvojio 2,5 boda?

20. Izračunati broj koeficijenata različitih od nule u razvijenom obliku izraza

$$(1 + x^2 + x^5)^{20}.$$

21. Tačka P_0 se nalazi u unutrašnjosti trougla ABC, kroz P_0 su provučene prave paralelne stranicama trougla, tako da mali trouglovi t_1, t_2, t_3 imaju redom površine 4, 9, 49. Odrediti površinu trougla ABC.

22. a) Odrediti $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

b) Ako je $a_n = a_{n-1} + 6n^2$, $n = 1,2,\ldots$, $a_0 = 0$,

pokazati da je

$$\frac{a_n}{(n+1)(2n+1)} = n, \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

23. Riješiti (u **R**):

a) jednačinu $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$;

b) nejednačinu $\frac{3\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} < 1$.

24. a) Odrediti sve vrijednosti realnog parametra α tako da rješenje (x, y) sistema linearnih jednačina

$$x - y = 2 + \alpha$$
$$x + y = 4 - 3\alpha$$

zadovoljava uslov $xy \le 0$.

b) Za nađeno α pod a), u ravni xOy grafički predstaviti skup rješenja datog sistema.

c) Odrediti sva rješenja (x, y) datog sistema, pri čemu su x, y cijeli brojevi, za nađene vrijednosti parametra α (u a)).

25. Hana je u svom gardaroberu posjedovala po pet, istovjetnih, pari crnih i bijelih rukavica. Već je bila u opasnosti da zakasni na pozorišnu predstavu, kada je nestalo električne energije. Druge rasvjete u stanu nije bilo, a ići u pozorište bez rukavica, ili pak u rasparenim rukavicama, nije imalo smisla.

a) Koliko je rukavica Hana minimalno morala uzeti ukoliko je namjeravala izaći iz stana sigurna da ima i nerasparene rukavice?

b) Koliko je rukavica Hana minimalno morala uzeti, ukoliko je namjeravala izaći iz stana sigurna da ima i nerasparene rukavice bijele boje?

III. RJEŠENJA, UPUTE I REZULTATI

Kvalifikacioni ispit od 11. 7. 1989.

2. $t \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right]$, vidi zadatak 12.17, str. 83. i 228. u Zbirci zadataka iz matematike, od autora R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar. (=[Ž-F-S])

5. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, k – cio broj, (vidi zad. 18.45, str. 140 i 304 u [Ž-F-S]).

Kvalifikacioni ispit od 5. 9. 1994.

1. b) Izraz je definisan za sve realne vrijednosti x : $x \neq a$, $x \neq 2$ uz uslov za parametar: $a \neq 2$, ($a \in \mathbf{R}$)

2. Imamo 4 mogućnosti:

1° $2x - \sin\alpha \geq 0$ i $\cos\alpha + 1 - x \geq 0$.

Tada je data jednačina ekvivalentna sa jednačinom

$$2x - \sin\alpha + \cos\alpha + 1 - x = x + 1,$$

odnosno sa:

$$\cos\alpha - \sin\alpha = 0,$$

tj. sa:

$$\alpha = \pi/4 + k\pi, \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Otuda je svaki broj $x \in \left[\frac{(-1)^k}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}\right]$ rješenje date jednačine, (k cio broj).

2° $2x - \sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha + 1 - x < 0$.

Tada je data jednačina ekvivalentna sa

$$2x - \sin\alpha - \cos\alpha - 1 + x = x + 1, \text{ tj. sa:}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Otuda za $2k\pi - \frac{7\pi}{4} < \alpha < 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$ (k cio broj) imamo da je

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

rješenje date jednačine.

3° $2x - \sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha + 1 - x > 0$.

Tada je data jednačina ekvivalentna sa

$$-2x + \sin\alpha + \cos\alpha + 1 - x = x + 1, \text{ tj. sa:}$$

$$x = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Otuda za $2k\pi - \frac{7\pi}{4} < \alpha < 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$ (k cio broj) imamo da je

$$x = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

rješenje date jednačine.

4° $2x - \sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha + 1 - x < 0$. (*)

Tada je data jednačina ekvivalentna sa

$$-2x + \sin\alpha - \cos\alpha - 1 + x = x + 1, \text{ tj. sa:}$$

$$x = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha - 2).$$

No, ovo nije rješenje date jednačine jer ne zadovoljava uslov (*).

Rezultat: 1) Za $\alpha < 2k\pi - \frac{7\pi}{4} \vee \alpha > 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$) data jednačina nema rješenja.

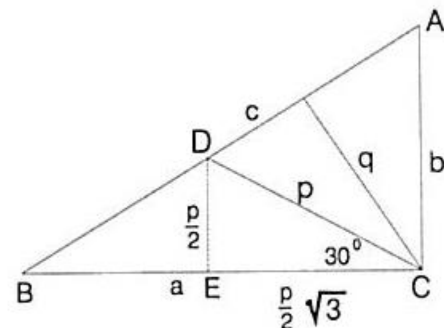
2) Za $\alpha = \frac{\pi}{4} - k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) data jednačina ima beskonačno rješenja, datih u 1°.

3) Za $2k\pi - \frac{7\pi}{4} < \alpha < 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$) data jednačina ima dva rješenja, data u 2° i 3°.

3. Iz sličnosti trouglova ABC i DBE izlazi jednakost

$$\frac{\frac{p}{2}}{b} = \frac{a - \frac{p}{2}\sqrt{3}}{a} \Rightarrow p = \frac{2ab}{a + b\sqrt{3}}.$$

Sličnim postupkom se dobije $q = \frac{2ab}{b + a\sqrt{3}}$.



4. $z = 2\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad \varphi \in [0, 2\pi]$

$$A = \left|2\cos\varphi + 2i\sin\varphi + \frac{1}{2(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right| = \left|\frac{5}{2}\cos\varphi + i\frac{3}{2}\sin\varphi\right|$$

$$A = \sqrt{\frac{25}{4}\cos^2\varphi + \frac{9}{4}\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{17 + 8\cos 2\varphi}$$

$$A_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{17+8} = \frac{5}{2} \quad \text{za} \quad \varphi = 0,\ \varphi = \pi,\ \varphi = 2\pi.$$

$$A_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{17-8} = \frac{3}{2} \quad \text{za} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

5. Označimo sa M broj odraslih muškaraca, sa Ž broj odraslih žena i sa D broj djece. Priroda problema nameće ograničenja:

$$0 < M < 6,\quad 0 < Ž < 10,\quad 0 < D < 10. \qquad (M, Ž, D \in N)$$

Uz to važe relacije:

$$2M + \frac{1}{2}Ž + \frac{1}{4}D = 12$$
$$M + Ž + D = 12$$

Za M = 1 $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{Ž}{2}+\frac{D}{4}=10 \\ Ž+D=11\end{array}\right\}$ Ž = 29, D = – 18 ne zadovoljava.

Za M = 2 $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{Ž}{2}+\frac{D}{4}=8 \\ Ž+D=10\end{array}\right\}$ Ž = 22, D = – 12 ne zadovoljava.

Za M = 3 $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{Ž}{2}+\frac{D}{4}=6 \\ Ž+D=9\end{array}\right\}$ Ž = 15, D = – 6 ne zadovoljava.

Za M = 4 $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{Ž}{2}+\frac{D}{4}=4 \\ Ž+D=8\end{array}\right\}$ Ž = 8, D = 0 ne zadovoljava.

Za M = 5 $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{Ž}{2}+\frac{D}{4}=2 \\ Ž+D=7\end{array}\right\}$ Ž = 1, D = 6 zadovoljava.

Kvalifikacioni ispit od 8. 9. 1995.

1. a) $E=\{x\in \mathbf{R} : x \neq -3,\ x^2-6x+9 \neq 0,\ x(x^2-tx+9) \neq 0\}$

1) Za $t^2-36<0$, tj. za $|t|<6$ $(-6<t<6)$

je uvijek $x^2-tx+9 \neq 0$.

2) Za $t^2-36=0$, tj. za $t=\pm 6$ je $x^2-tx+9 \neq 0$ za $x \neq \frac{t}{2}$ $(=\pm 3)$.

3) Za $t^2-36>0$ tj. za $|t|>6$ $(t<-6 \vee t>6)$ je $x^2-tx+9 \neq 0$

za $x \neq \frac{t \pm \sqrt{t^2-36}}{2}$.

Dakle,

$$E=\begin{cases}\mathbf{R}\setminus\{-3{,}0\}, & -6\le t<6,\\ \mathbf{R}\setminus\{-3{,}0{,}3\}, & t=6,\\ \mathbf{R}\setminus\left\{-3{,}0,\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-36}}{2}\right\}, & t<-6 \lor t>6.\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3-x^2-3x+2x+6}{x+3}\cdot\frac{2(x+3)^2}{x(x^2-tx+9)}=\frac{6(x+3)(3-x)}{x(x^2-tx+9)},\ \text{(na E)}.$$

c) $f(x)\equiv\dfrac{6(x+3)}{x(3-x)}\Leftrightarrow\dfrac{6(x+3)(3-x)}{x(x^2-tx+9)}\equiv\dfrac{6(x+3)}{x(3-x)},$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-tx+9\equiv(3-x)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad t=6\ \text{(na E)}.$$

2. a) $D(f)=\begin{cases}\mathbf{R}, & a>0,\\ \mathbf{R}^+, & a=0,\\ \left\{\frac{p}{q}:\ \text{p i q relativno prosti cijeli brojevi i q neparan}\right\},\end{cases}$

b) $a=4,\ b=\sqrt[3]{2}\ \Rightarrow\ f(x)=2^{2x},\ g(x)=(\sqrt[3]{2})^x\ \Rightarrow\ f\left(\frac{201}{4}\right)=2^{201/2},$ $g(201)=2^{201/3}$

Kako su jednake baze i obje veće od 1 (tj. obje su 2), to je stepen $2^{201/2}$ veći od stepena $2^{201/3}$, tj. $f\left(\frac{201}{4}\right)>g(201)$.

c) $a=3,\ b=5$:

$$21\cdot f(x)+100\cdot g(x)-f(x+4)<0$$

$$\Leftrightarrow\quad 21\cdot 3^x+100\cdot 5^x-3^{x+4}<0$$

$$100\cdot 5^x-60\,3^x<0\ \text{ ili }\ 5\cdot 5^x-3\cdot 3^x<0$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+1}<3^{x+1}\ \text{ ili }\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}<1=\left(\frac{5}{3}\right)^0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1.$$

d) Za a=1995 $\Rightarrow$

$$\frac{f(1996)+1}{f(1997)+1}=\frac{1995^{1996}+1}{1995^{1997}+1}=A,\ \frac{f(1994)+1}{f(1995)+1}=\frac{1995^{1994}+1}{1995^{1995}+1}=B.$$

Neka je $x=1995^{1995}$. Tada je $A=\dfrac{1995x+1}{1995^2x+1}$, $B=\dfrac{\frac{x}{1995}+1}{x+1}$,

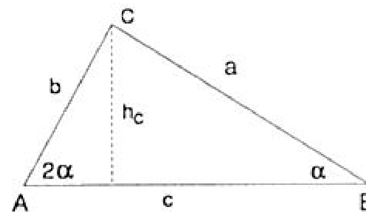
$$A<B \Leftrightarrow \frac{1995x+1}{1995^2x+1}<\frac{\frac{x}{1995}+1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$1995^2x^2+1995^2x+1995x+1995<1995^2x^2+x+1995^3x+1995$$

$$\Leftrightarrow 1994<1995^2\cdot 1994,\text{ što je tačno.}$$

3. $h_c=a\sin\alpha=b\sin 2\alpha$

$\Rightarrow a=2b\cos\alpha\ \ (\sin\alpha\neq 0)$



$b^2=c^2+a^2-2ac\cdot\cos\cdot\alpha=c^2+a^2-2ac\dfrac{a}{2b}$

$\Rightarrow a^2=b\cdot(b+c)$

$$\Rightarrow a^2=9\cdot 25 \Rightarrow a=15$$

$$\cos\alpha=5/6,\ \angle B=\alpha,\ \angle A=2\alpha,\ \angle C=\pi-3\alpha$$

$$\alpha=\arccos 5/6$$

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{20\cdot 11\cdot 4\cdot 5}=20\sqrt{11}$$

$$P=\frac{ac\cdot\sin\alpha}{2}=20\sqrt{11}$$

$$O=2s=40.$$

4. $(\sin 2x+1)+\cos 2x+\sin x+\cos x=0$

$(\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x)+(\cos^2x-\sin^2x)+(\cos x+\sin x)=0$

$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)=0$

$(\cos x+\sin x)(2\cos x+1)=0 \Rightarrow \sin(x+\pi/4)=0\ \vee\ \cos x=-0.5$

$x+\pi/4=k\pi\ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ x=\pi+(\pi/3)+2k\pi\ (k\in Z,\ x\in(0,2\pi))$

$$x_1=3\pi/4,\ x_2=7\pi/4,\ x_3=2\pi/3,\ x_4=4\pi/3.$$

5. $\frac{x}{10}+\frac{y}{10}=1 \Rightarrow m = n = 10$ segmenti prave,

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a = 2,\ b = 1$ poluose elipse sa centrom u (0,0).

$x^2 + 4y^2 = 4,\ x + y = 10 \Rightarrow 5x^2 - 80x + 396 = 0 \Rightarrow D = 6400 - 7920 < 0$

$\Rightarrow$ prava ne siječe elipsu.

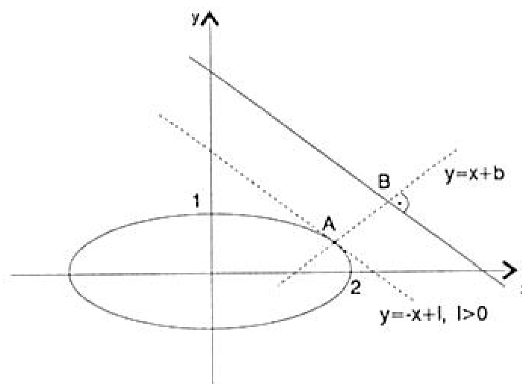
$y = -x+i \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow 5x^2 - 8xi + 4(i^2 - 1) = 0,\ D = 0 \Rightarrow i = \sqrt{5} > 0.$

$y = -x + \sqrt{5}$ tangenta na elipsu u tački A.

$x_A = -\frac{b}{2a} = \frac{4i}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5},\ y_A = \sqrt{5} - \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow A\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

b)

$d_{min} = \frac{|x_A + y_A - 10|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$



c) y=x+b prava kroz tačku A i okomita na tangentu:

$b = y_A - x_A = -\frac{3\sqrt{5}}{5},\ y = x - \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$y_B = x_B - \frac{3\sqrt{5}}{5} = 10 - x_B$

$\Rightarrow x_B = 5 + \frac{3\sqrt{5}}{10},\ y_B = 5 - \frac{3\sqrt{5}}{10} \Rightarrow B\left(5 + \frac{3\sqrt{5}}{10};\ 5 - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)$

Najbliže su tačke : A na elipsi i B na pravoj.

Kvalifikacioni ispit od 4. 10. 1995.

1. $f(x) = (a+1)\,x^2 - (a^2 + a + 6)\,x + 6a$

$f(0) = 6a,\ f(1) = -a^2 + 6a - 5,$

$f(0)\,f(1) < 0 \Rightarrow a\,(a^2 - 6a + 5) > 0,$

$a\,(a-1)\,(a-5) > 0 \Rightarrow a \in (0, 1) \cup (5, +\infty).$



2. $\angle D$ trougla ADB je 120°, dok je $\angle B$ istog trougla 15°,

te je:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{DB}}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \overline{DB}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ-30^\circ)}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=1+\sqrt{3},$$

$\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{DB}$ po *Ptolomejevom stavu*, tj.

$$\overline{CD}=2+\sqrt{3}.$$

Dalje je

$$a^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2-2\,\overline{AD}\,\overline{DB}\cos 120^\circ=1+(1+\sqrt{3})^2+1+\sqrt{3}=3(2+\sqrt{3}),$$

tj.

$$a=\sqrt{3(2+\sqrt{3})},$$

$$a=2R\cos 30^\circ=R\sqrt{3}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{2+\sqrt{3}},\text{ tj.}$$

$$R=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

4. $x>0 \quad \Rightarrow x+1>0\Rightarrow \sqrt{x+1}\pm 1\neq 0,\ \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\neq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}-\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{2}{x}$$

$$x^{\log^2 x+\log x^3+3}=\frac{2}{\frac{2}{x}}=x$$

$$(\log^2 x+3\log x+3)\log x=\log x$$

$$(\log x)(\log^2 x+3\log x+2)=0$$

$$\log x_1=0\ \Rightarrow\ x_1=1$$

$$\log x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2},$$

$$\log x_2=-2\ \Rightarrow\ x_2=\frac{1}{100},$$

$$\log x_3=-1\ \Rightarrow\ x_3=\frac{1}{10}.$$

Kvalifikacioni ispit od 29. 7. 1996.

1. Učesnici koji su se plasirali na 5, 6, 7 i 8 mjesto odigrali su međusobno 6 partija. Oni su na taj način zajedno sakupili na kraju turnira ne manje od 6 bodova.

Drugoplasirani je stoga osvojio ne manje od šest bodova.

S obzirom da je prvoplasirani mogao osvojiti maksimalno 7 bodova, to drugoplasirani nije mogao imati više od šest bodova (6.5 bodova znači da je igrao neriješeno s prvoplasiranim, ali oni tada imaju isto bodova).

Drugoplasirani ima stoga 6 bodova.

Trećeplasirani je pobijedio petoplasiranog jer ukoliko bi neko od učesnika iz donje polovine tablice osvojio i pola boda iz susreta sa učesnicima iz gornje polovice tablice, drugoplasirani bi imao 6.5 bodova ili više, a on tada nije na drugom mjestu.

2. a) 1°. Dati izraz je definisan (u **R**) za sve a, b, c iz **R** za koje je :

$$a^5+b^5+ab \neq 0,\ b^5+c^5+bc \neq 0,\ c^5+a^5+ca \neq 0,\ bc \neq 0,$$

$$a+3 \neq 0,\ a \neq 0,\ a^2-\alpha a+9 \neq 0.$$

$$2°.\ (A:B)\cdot\left(C:\frac{(a^3-\alpha a^2+9a)(c^5+a^5+ac)^{-1}}{2a^2+12a+18}\right)=$$

$$=\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\cdot\frac{b^5+c^5+bc}{bc}\cdot\frac{ac}{c^5+a^5+ac}\cdot\frac{2(a+3)^2(c^5+a^5+ac)}{a(a^2-\alpha a+9)}=$$

$$=\frac{2a(a+3)^2(b^5+c^5+bc)}{(a^5+b^5+ab)(a^2-\alpha a+9)}$$

(ovaj oblik se dalje može svesti na oblik $\frac{2a(b^5+c^5+bc)}{a^5+b^5+ab}$ za $\alpha=-6$, odnosno na neke druge jednostavnije oblike za specijalne a, b).

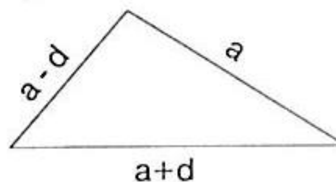
$$b)\ A+B+C \le \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}+\frac{bc}{b^2c^2(b+c)+bc}+\frac{ac}{a^2c^2(a+c)+ac}=$$

$$=\frac{1}{ab(a+b)+1}+\frac{1}{bc(b+c)+1}+\frac{1}{ac(a+c)+1}=$$

$$=\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ac(a+b+c)}=$$

$$=\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1.$$

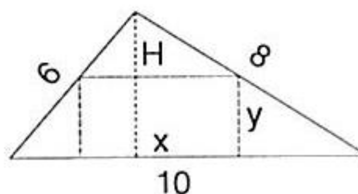
3. Neka su mjerni brojevi dužina stranica datog trougla: $a-d$, a, $a+d$, $(d>0)$.



Iz obrasca za površinu P trougla imamo:

$$P=\frac{abc}{4R}=\rho\cdot s,$$

odakle je



$$s=\frac{P}{\rho}=12=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3a}{2},\ \text{tj. } a=8,.$$

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{12\cdot 4\cdot(16-d^2)}=24,$$

tj. $16-d^2=12$, **odnosno $d=2$.**

Kako je $10^2=8^2+6^2$, dati trougao je pravougli. Takođe, imamo:

$$R=\frac{abc}{4P}=\frac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 24}=5\ \ (\text{cm}),$$

$$P_0=x\cdot y\ \wedge\ \frac{x}{H-y}=\frac{10}{H},\ \frac{6\cdot 8}{2}=\frac{10\cdot H}{2}\ \Rightarrow H=\frac{24}{5}\ \Rightarrow x=10-\frac{25}{12}y,$$

$$P_0=10y-\frac{25}{12}y^2\ \Rightarrow y_T=\frac{10\cdot 12}{25\cdot 2}=\frac{12}{5},\ x_T=5\ \Rightarrow P_{max}=12\text{ cm},$$

$$P_{\square}=P_{max}=\mathbf{12\ (cm)},$$

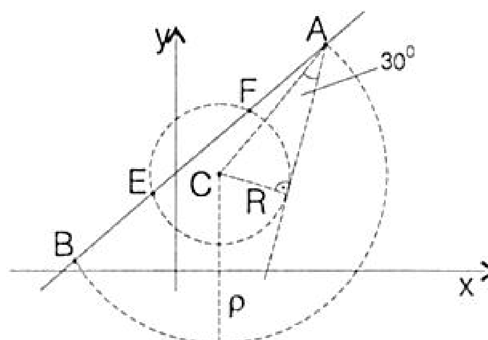
$$P_{\Delta}:P_{\square}=24:12=2:1.$$

4. Imamo:

$$x^2+y^2-4x-9y+12=0\ \Leftrightarrow (x-2)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow C\left(2,\ \frac{9}{2}\right),\ R=\frac{7}{2},$$

$$R=\overline{CA}\sin 30^\circ \Rightarrow \overline{CA}=7,$$



$$(x-2)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\rho^2=7^2=49,$$

kružna linija iz koje se data kružnica vidi pod uglom od 60° iz svake tačke.

Dalje je:

$$A,B\begin{cases}(x-2)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=49\\ y=x+3\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=49 \Rightarrow 8x^2-28x-171=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{1564}}{8} \Rightarrow \text{ uz } y_{1,2}=x_{1,2}+3,$$

$$A\left(\frac{14+\sqrt{1564}}{8},\frac{38+\sqrt{1564}}{8}\right),\ B\left(\frac{14-\sqrt{1564}}{8},\frac{38-\sqrt{1564}}{8}\right).$$

Kako je udaljenost centra od prave y=x+3, $d=\dfrac{\left|2-\frac{9}{2}+3\right|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}<R=\dfrac{7}{2}$, to prava y=x+3 siječe datu kružnicu u tačkama E i F. Tačke "D" iz koje se dati krug vidi pod maximalnim uglom su sve tačke na tetivi $\overline{EF}$ (izuzimajući te tačke), $\alpha^{\circ}_{max_D}=360^\circ$.

5. Iz datog sistema jednačina lako se dolazi do relacije:

$$(1) \qquad \sin x+\sin y-\sin z=-\sin(x+y+z).$$

Zbog

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin z-\sin(x+y+z)=2\cos\frac{2z+x+y}{2}\sin\frac{z-x-y-z}{2},$$

izraz (1) se može transformisati u izraz:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=-\cos\frac{2z+x+y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$

odnosno u izraze:

$$\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{2z+x+y}{2}\right)=0,$$

$$\sin\frac{x+y}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{\frac{x-y}{2}+\frac{2z+x+y}{2}}{2}\cos\frac{\frac{x-y-2z-y-x}{2}}{2}=0,$$

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+z}{2}\cdot\cos\frac{y+z}{2}=0.$$

Rješenje posljednje jednačine je određeno sa

$$\left(\sin\frac{x+y}{2}=0\right)\vee\left(\cos\frac{x+z}{2}=0\right)\vee\left(\cos\frac{y+z}{2}=0\right),$$

tj. skup rješenja datog sistema jednačina dat je sa :

$$\{(x,y,z):\ x=k\pi,\ y=p\pi,\ z=m\pi,\ k,p,\ m\ \in \mathbf{Z}\}.$$

b) Izraz $(2x-\sin\alpha)(1-x+\cos\alpha)$ je ≥ 0 za

$(2x-\sin\alpha\geq 0\ \wedge\ 1-x+\cos\alpha\geq 0)\vee(2x-\sin\alpha\leq 0\ \wedge\ 1-x+\cos\alpha\leq 0)$, a što je za $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ ispunjeno ako je $x\in\left[\frac{(-1)^k}{2\sqrt{2}},1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}\right]$, a za ostale realne x izraz $(2x-\sin\alpha)(1-x+\cos\alpha)$ je ≤ 0.

Međutim, izraz $\log_{0.75}\sin x-\log_{\frac{9}{16}}0.75$ je ≥ 0 za $\log_{\frac{3}{4}}\sin x\geq\frac{1}{2}$, tj. za

$0<\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno za $2p\pi<x\leq\frac{\pi}{3}+2p\pi\ \vee\ \frac{2\pi}{3}+2p\pi\leq x<\pi+2p\pi$,

$(p\in\mathbf{Z})$, dok $\log_{0.75}\sin x-\log_{\frac{9}{16}}0.75$ je ≤ 0 za $\frac{\pi}{3}+2p\pi\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2p\pi$.

Otuda se sada lako dobija konačan rezultat.

Kvalifikacioni ispit od 20. 9. 1996.

1. Zbog toga što zbir dva jednocifrena broja mora biti manji od 19, opravdano je zaključiti da je D=1.

U tom slučaju važi relacija:

$$\begin{array}{r} U1AR \\ +U1AR \\ \hline 1RAMA \end{array} \qquad \left(\begin{array}{r} UDAR \\ UDAR \\ \hline DRAMA \end{array}\right)$$

Nadalje se lako uočava i da je 1+1=A ili 1+1+1=A. Dakle, A može biti ili 2 ili 3. Zbog 2R=A ili 2R=1A, A mora biti paran broj, odnosno A=2.

Analizirajući relaciju

$$\begin{array}{r} U12R \\ +U12R \\ \hline 1R2M2 \end{array}$$

2R može biti ili 2 ili 12 , odnosno R=1 ili R=6.

Zbog 2U=1R ne može biti R=1, nego R mora imati vrijednost R=6.

Lako se zaključuje da pri R=6, M mora imati vrijednost 5. Zbog 2U=16, slijedi da je U=8. Konačno može se pisati da je D=1, A=2, R=6, M=5, U=8.

Provjera: 8126+8126=16252.

2.

$$\left\{\begin{array}{c} 10^{-\log(x-y)} = 3^{-2} \\ \sqrt{x-y} - \frac{1}{3}\sqrt{x+y} = \frac{4-y}{\sqrt{x-y}} \end{array}\right\}$$

Prva jednačina se može odmah pisati u obliku:

$$\frac{1}{10^{\log(x-y)}} = \frac{1}{3^2} \quad \Rightarrow \quad x - y = 9.$$

U drugoj jednačini moguće je uspostaviti odnos:

$$\sqrt{9} - \frac{1}{3}\sqrt{9+2y} = \frac{4-y}{\sqrt{9}} \quad \Rightarrow \quad 9 - 4 + y = \sqrt{9+2y},$$

odakle se dobija da je

$$25 + 10y + y^2 = 9 + 2y \quad \Rightarrow \quad y^2 + 8y + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = -4.$$

$$\text{Za } y_{1,2} = -4, \quad x = 5.$$

3. Zadata jednačina se može napisati u obliku:

$$(\sin 2x \ +1\ ) + \cos 2x + \sin x + \cos x = 0,$$

odnosno u obliku:

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)\ (\cos x - \sin x) + \ (\cos x + \sin x) = 0.$$

Nadalje je pogodno pisati poslijednju jednačinu u obliku

$$(\cos x + \sin x)\ (\cos x + \sin x + \cos x - \sin x + 1) = 0,$$

odakle se lako dolazi do jednačine

$$(\cos x + \sin x)\ (\cos x + \frac{1}{2}) = 0. \quad (*)$$

Poslijednja relacija je ispunjena za $\cos x = -\frac{1}{2} \ \vee \sin (x + \frac{\pi}{4}) = 0.$

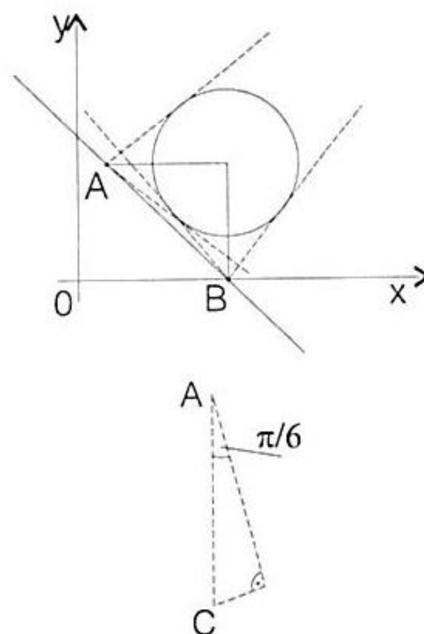
Na zadatom intervalu $(0, \pi)$ relacija (*) zadovoljena je za $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ i za $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

4. Na osnovu jednačine date kružnice $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$, da se zaključiti da se njen centar nalazi u tački (3, 2), i da joj je radijus R=1. Imamo (prema slikama):

$$\overline{AC} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 1,$$

$$\overline{AC} = 2,$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\overline{CA})^2.$$



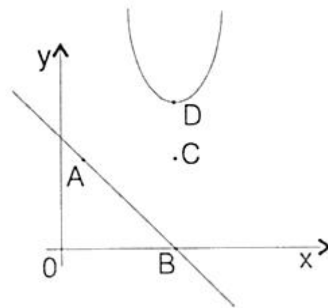
Stoga na osnovu relacija

$$\left.\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-2)^2 &= 4\\ x + y &= 3\end{aligned}\right\}$$

lako određujemo tražene tačke:

$x_A=1 \quad \Rightarrow \quad y_A=2,$

$x_B=3 \quad \Rightarrow \quad y_B=0.$



Nadalje je:

$$y=x^2-6x+\alpha,\ \ \alpha>0,\ a=1,$$

$$x_T=-\frac{b}{2a}=3\ ,\ \ D(3,\ 4),$$

$4=9-18+\alpha \quad \Rightarrow \alpha=13,\ y=x^2-6x+13.$

c) $x_A=1$ i $x_B=3$ su po uslovu zadatka, nule funkcije $f(2x+1)$. Neka je $2x+1\equiv u \ \Rightarrow$ $f(u)$ ima nule $U_A=2\cdot1+1=3$, $U_D=2\cdot3+1=7$.

Za $u\equiv|3-|2-x||=||x-2|-3|$,

$f(||x-2|-3|)$ ima nule za one x za koje je:

1°. $||x-2|-3|=3,$

tj. $|x-2|-3=\pm 3,$

$|x-2|=6$ ili $|x-2|=0,$

$(x-2)=\pm 6$ ili $(x-2)=0$

$x_1=8,\ x_2=-4,\ x_3=2$

2°. $||x-2|-3|=7,$

tj. $|x-2|-3=\pm 7$

$|x-2|=10$ ili $\underbrace{|x-2|=-4}_{\text{nema smisla}},$

$(x-2)=\pm 10$

$x_4=12,\ x_5=-8.$

5. a) $\dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\dfrac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$. Ova jednačina je definisana na skupu $\{x\in \mathbf{R}:\ x\neq 0 \wedge x\neq 1\}$, uz uslov za parametar $a\in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

Kako je:

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}\equiv\frac{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^3}{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2},$$

moguće je uočiti da ukoliko $x=x_1$ prestavlja rješenje (korijen) zadate jednačine i broj x_2 određen relaciom

$x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x_2$, odnosno $x_2 = 1 - x_1$ je takođe korijen iste jednačine.

Uz to i $x = \frac{1}{x_1}$ je takođe korijen zadate jednačine.

Uzimajući prethodno u obzir, rješenja polazne jednačine su

$$x_1 = a,\ x_2 = 1 - a,\ x_3 = \frac{1}{a},\ x_4 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1-a},$$

$$x_5 = 1 - x_3 = \frac{a-1}{a},\ x_6 = \frac{1}{x_5} = \frac{a}{1-a},\quad (a \in \setminus R\{0,1\}).$$

b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$ ako je $\operatorname{tg} x > 0$ i $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leq -2$ za $\operatorname{tg} x < 0$.

Kako je $2 + \sin y \geq 1$ za svako y iz **R**, to mora biti $\operatorname{tg} x = 1$, $\sin y = -1$.

Prema tome, rješenja date jednačine su svi uređeni parovi (x, y) za koje je:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ (k, m \in \mathbf{Z}).$$

Kvalifikacioni ispit od 16. 7. 1997.

1. a) Dati izraz A(x) je definisan za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je

$$x \neq 0,\ x \neq a,\ x \neq -a,\ \frac{x}{x+a} - \frac{a}{a-x} \neq 0,$$

uz uslov za parametar : $a \neq 0$ ($a \in \mathbf{R}$) /tj. $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$/.

Kako je $\frac{x}{x+a} - \frac{a}{a-x} \neq 0$ ekvivalentno sa $\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} \neq 0$, to je dati izraz A(x) definisan na skupu

$$D = \mathbf{R} \setminus \{-a, 0, a\},$$

uz uslov za parametar $a \neq 0$.

Dati izraz B(x) je definisan za sve x iz $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

b) $A(x)=\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right):\left(\frac{x}{x+a}+\frac{a}{x-a}\right)=\frac{x^2+a^2}{ax}:\frac{x^2-ax+ax+a^2}{x^2-a^2}=$

$=\frac{x^2+a^2}{ax}\cdot\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=\frac{x^2-a^2}{ax}$, $(a\neq 0, x\in \mathbf{R}\setminus\{0,-a,a\})$

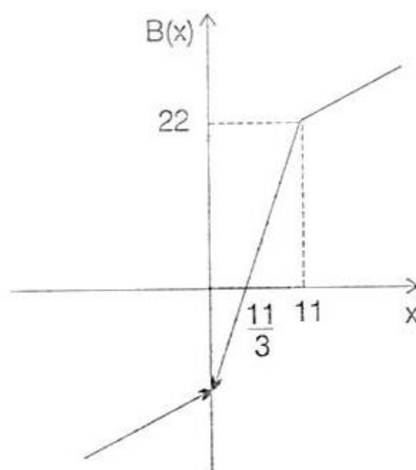
c) Za $x=5$, $a=4$, imamo:

$$C(5)=20\cdot A(5)-B(5)=20\cdot\frac{25-16}{20}-\sqrt{(-5)^2}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}+|5-11|=$$

$=9-5-5+6=5.$

d) Iz $B(x)=\sqrt{x^2}+x-|x-11|=|x|+x-|x-11|$, $(x\neq 0)$, slijedi

$$B(x)=\begin{cases}-x+x+x-11=x-11, & x<0,\\ x+x+x-11=3x-11, & 0<x\leq 11,\\ x+x-(x-11)=x+11, & x>11.\end{cases}$$



Sl. 1.

Grafik date funkcije $y=B(x)$ dat je na slici 1.

2. 1° Neka je osnova nepoznatog brojnog sistema B. Tada se data relacija može napisati u obliku $(3)_B x(15)_B=(51)_B$ i ekvivalentna je sa relaciom:

$(3\cdot B^0)\cdot(1\cdot B^1+5\cdot B^0)=(5\cdot B^1+1\cdot B^0)$,

odakle je

$(3\cdot 1)\cdot(B+5\cdot 1)=5\cdot B+1$,

$3\cdot(B+5)=5B+1$,

$3B+15=5B+1$,

$14=2B$,

$7=B$.

Dakle, data relacija vrijedi u brojnom sistemu sa osnovom 7.

2° U brojnom sistemu sa osnovom 7 izraz 13x6 možemo pisati u obliku $(13)_7 x(6)_7$ i imamo:

$$(13)_7 x(6)_7=[(1\cdot 7^1)+3\cdot 7^0]\cdot[6\cdot 7^0]=6\cdot 7^1+6\cdot 3\cdot 7^0=$$

$= 6 \cdot 7^1 + (7^1 + 7^1 + 4 \cdot 7^0) \cdot 7^0 = 7 \cdot 7^1 + 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 7^2 + 7^1 + 4 \cdot 7^0 = (114)_7.$

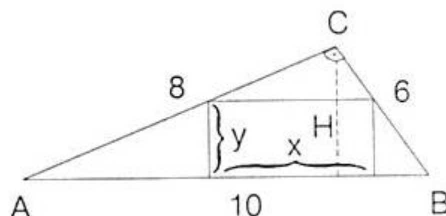
3. 1° Neka je $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$, $R = uk$, $(k \neq 0)$.

Tada je

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 6k,\ P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 6k^2,\ R = \frac{abc}{4P} = \frac{60k^3}{4 \cdot 6k^2} = \frac{5}{2}k$$

Zbog $\frac{5}{2}k = uk$ je $u = \frac{5}{2}$.

(Za $u \neq \frac{5}{2}$, zadatak nije moguć.)



Sl. 2.

Dalje je

$$q = \frac{P}{s} = \frac{6k^2}{6k} = k.\ \text{Zbog } k = q,\ q = 2$$

imamo $k = 2$.

Tada je $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ i $R = 5$.

Zbog $c^2 = a^2 + b^2$, razmatrani trougao je pravougli.

2° Označimo sa P veličinu mjernog broja površine traženog pravougaonika. Tada je, prema slici 2, $P = xy$, odakle je:

$$\frac{10}{x} = \frac{H}{H-y} \Rightarrow y = H \cdot \left(1 - \frac{x}{10}\right) \Rightarrow P = H \cdot \left(x - \frac{x^2}{10}\right).$$

Budući da izraz $ax^2 + bx + c$, $(a>0)$, ima maksimalnu vrijednost za $x = -\frac{b}{2a}$,

to P ima maksimalnu vrijednost za $x = -\frac{1}{-\frac{2}{10}} = 5$.

Otuda je $y = H \cdot \frac{1}{2}$.

Kako je površina trougla $P_\triangle$ data sa

$$P_\triangle = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{10}{2}H \text{ to je } H = \frac{24}{5},\ \text{tj. } y = \frac{12}{5},\ P_{max} = 5 \cdot \frac{12}{5} = 12.$$

4. Relacija $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=2$ ima smisla za $\sin\frac{x}{2}\neq 0$ i $\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\neq 0$, odnosno za $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. Relacija se može lako dovesti na oblik:

$$\frac{\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}=2,\ \text{odnosno}\ \frac{\cos\frac{x}{2}+1}{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}=2,\ x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Iz $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=2,\ x\neq 2k\pi$, slijedi $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, odnosno:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \lor\ \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi.$$

Rješenja date jednačine su dakle:

$$x=\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ (k\in\mathbf{Z}),$$

$$x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\ (k\in\mathbf{Z}).$$

5. Jednačina (kojom je definisana familija kružnica)

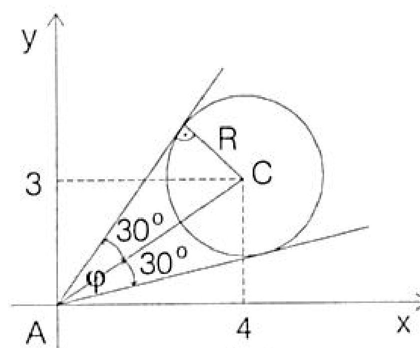
$$x^2+y^2-8x-6y=\alpha,\quad (\alpha\in\mathbf{R}),$$

lako se dovodi na oblik

$$(x-4)^2+(y-3)^2=\alpha+25,$$

odakle možemo zaključiti da je:

$\alpha+25=R^2$, te da je $\alpha>-25$. Centar familije kružnica je u tački $C(4,3)$.



Sl. 3.

S obzirom da je

$$R=AC\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sin 30^\circ=\sqrt{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

to iz $R=\sqrt{\alpha+25}$ slijedi $\alpha=-\frac{75}{4}$.

Dakle, tražena kružnica data je jednačinom:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Kvalifikacioni ispit od 16. 9. 1997.

1. Izrazi u datoj jednačini su definisani za svako x iz **R** za koje je:

$$x-1>0,\ 4-x>0,\ x>0 \text{ tj. za svako } x\in(1,\ 4).$$

Data jednačina je ekvivalentna sa jednačinom

$$\log\frac{x-1}{4-x}=\log\frac{x}{4} \text{ tj. sa } \frac{x-1}{4-x}=\frac{x}{4}, \text{ odakle je } x^2=4 \text{ tj. } x=2.$$

b) Definiciono područje date jednačine je isto kao i jednačine pod a), tj. data jednačina je definisana na skupu $D=(1,\ 4)$, uz uslov za parametar : $\alpha>0$.

Data jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{x-1}{4-x}=\alpha\cdot x,\ x\in(1,4),(\alpha>0), \text{ tj. sa}$$
$$\alpha x^2-x(4\alpha-1)-1(=f(x))=0,\ x\in(1,4),(\alpha>0).$$

No, da bi dobijena kvadratna jednačina imala dva realna rješenja $x_{1,2}$ u intervalu (1, 4) morala joj bi diskriminanta D biti nenegativna i morali bi biti zadovoljeni istovremeno sljedeći uslovi:

$$\alpha\cdot f(1)>0,\quad \alpha\cdot f(4)>0,$$
$$1<\frac{x_1+x_2}{2}<4.$$

Međutim, kako je

$$\alpha\cdot f(1)=\alpha\cdot(-3\alpha)=-3\alpha^2<0$$

za svako $\alpha\neq 0$ i kako je $\alpha>0$ prema uslovu za parametar α u datoj jednačini, to zaključujemo da ni za jedno α iz **R**, data jednačina nema dva realna rješenja.

2. Neka je $y=ax+b$ jednačina tangente na datu kružnicu. Tada iz uslova da tangenta prolazi kroz tačku (2, 1) imamo:

$$1=2a+b,$$

odakle je

$$y=ax+1-2a,$$

jednačina prave kroz datu tačku.

Iz uslova da ova prava sječe datu kružnicu imamo

$$x^2+(ax+1-2a)^2=1,$$

$$x^2+a^2x^2+(1-2a)^2+2ax(1-2a)=1,$$

$$x^2(1+a^2)+2ax(1-2a)+4a^2-4a=0.$$

Da bi se posmatrana prava i kružnica sjekle u jednoj jedinoj tački mora biti

$$D=a^2(1-2a)^2-(4a^2-4a)(1+a^2)=0,$$

$$\text{tj. } a^2(1-2a)^2=4a^2-4a+4a^4-4a^3,$$

$$3a^2=4a,$$

odakle su

$$a_1=0,\ a_2=\frac{4}{3}$$

koeficijenti smjera tangenata iz date tačke na datu kružnicu. Oštri ugao α između tih tangenata dat je sa:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{\frac{4}{3}-0}{1}\right|=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}.$$

3. Imamo

$$110_{(2)}=(1\cdot2^2)+(1\cdot2^1)+(0\cdot2^0)=4+2=6_{(10)},$$
$$1011_{(2)}=(1\cdot2^3)+(0\cdot2^2)+(1\cdot2^1)+(1\cdot2^0)=8+2+1=11_{(10)},$$
$$2012_{(3)}=(2\cdot3^3)+(0\cdot3^2)+(1\cdot3^1)+(2\cdot3^0)=59_{(10)},$$
$$1021_{(3)}=(1\cdot3^3)+(0\cdot3^2)+(2\cdot3^1)+(1\cdot3^0)=34_{(10)},$$
$$2013_{(4)}=(2\cdot4^3)+(0\cdot4^2)+(1\cdot4^1)+(3\cdot4^0)=135_{(10)},$$
$$112_{(4)}=(1\cdot4^2)+(1\cdot4^1)+(2\cdot4^0)=22_{(10)},$$
$$42_{(5)}=(4\cdot5^1)+(2\cdot5^0)=22_{(10)},$$
$$103_{(5)}=(1\cdot5^2)+(0\cdot5^1)+(3\cdot5^0)=28_{(10)}.$$

Dakle, od datih brojeva, neparni brojevi su: $1011_{(2)}$, $2012_{(3)}$ i $2013_{(4)}$, a ostali brojevi su parni.

4. a) Za sve a, b, c iz **R** imamo:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$=\left[\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)+c^3\right]-\left(3a^2b+3ab^2+3abc\right)=$$
$$=\left[(a+b)^3+c^3\right]-3ab(a+b+c)=$$
$$=[a+b+c]\cdot\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)=$$
$$=(a+b+c)\cdot\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2-3ab\right]=$$
$$=(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

b) Prvo rješenje:

$$a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow (a+b)^3=-c^3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3+3ab(a+b)+b^3=-c^3\Rightarrow a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=-3ab(-c)\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Drugo rješenje:

Primjetimo da implikacija

$$a+b+c=0\Rightarrow (a^3+b^3+c^3=3abc)$$

slijedi neposredno iz a).

c) Kako je $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\equiv(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, to imamo:

$$(\forall(a,b,c\in\mathbf{R}))\quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0.$$

d) Iz a) i c), imamo

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\geq 0$$

za sve realne nenegativne brojeve a, b, c, tj.

$$(\forall(a,b,c\in[0,+\infty)))\quad a^3+b^3+c^3\geq 3abc.$$

Ako stavimo $a=\sqrt[3]{x},\ b=\sqrt[3]{y},\ c=\sqrt[3]{z}$, dobijemo traženu nejednakost:

$$(\forall(x,y,z\in[0,+\infty)))\quad \frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}$$

(nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine nenegativnih brojeva x, y, z).

5. Na osnovu kosinusne teoreme važi:

$$F_1^2=F_2^2+F_3^2-2F_2F_3\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{-4191}{5640}\approx-0{,}743,$$

odakle je

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{4191}{5640}\right)=180^\circ-\arccos\frac{4191}{5640}\approx 138^\circ.$$

$\alpha = \angle(\vec{F}_2, \vec{F}_3) \approx 180° - 138° = 42°$

Prema sinusnoj teoremi imamo

$$\frac{F_1}{\sin\varphi} = \frac{F_3}{\sin\theta},$$

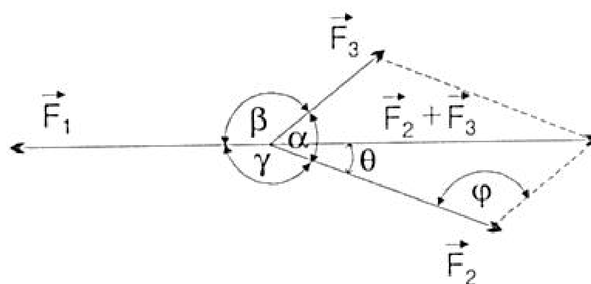
$$\text{tj.}\quad \sin\theta = \frac{47}{100} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4191}{5640}\right)^2} \approx 0{,}31449,$$

$$\text{tj.}\quad \theta \approx 18{,}33°.$$

Otuda je:

$\beta = 180 - \alpha + \theta \approx 156°\,20'$,

$\gamma = 360 - \beta - \alpha \approx 161°\,40'$.



Razni zadaci

1. $\overline{xyz}$: traženi trocifreni broj $0< x \le 9$, $0 \le y \le 9$, $0 \le z \le 9$ (x, y, z cijeli brojevi)

(1) x, y, z aritmetički niz :

$$\left.\begin{matrix} d = y - x = z - y \\ x + y + z = 12 \\ x < y < z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x + z = 2y \\ x + y + z = 12 \\ x < y < z \end{matrix}$$

(2) x, y, x+z geometrijski niz :

$$q = \frac{y}{x} = \frac{y+z}{y} \Rightarrow y^2 = x(x+z),$$

$$x + z = 2y$$
$$x + y + z = 12$$
$$\underline{y^2 = x(x+z)}$$
$$3y = 12 \Rightarrow y = 4$$
$$16 = x \cdot 8 \Rightarrow x = 2$$
$$z = 2y - x = 8 - 2 = 6,$$
$$z = 6,$$

Varijanta rješenja II:

$\overline{xyz}$: traženi broj

(1) $x = a - d$, $y = a$, $z = d + a$,

$x + 4 + z = 3a = 12 \Rightarrow a = 4$

$x = 4 - d$, $y = 4$, $z = d + 4$

(2) 4–d, 4, 8

$$\frac{4}{4-d} = \frac{8}{4} = q = 2$$

$$4 = 8 - 2d \Rightarrow d = 2$$

$$x = 2, \; y = 4, \; z = 6$$

$$\overline{xyz} = 246.$$

traženi broj je: $\overline{xyz} = 246$.

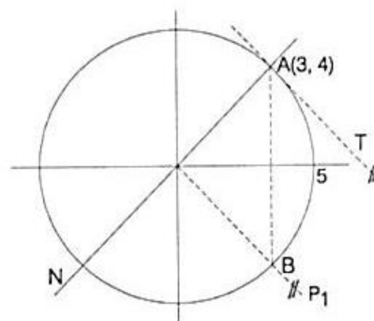
2. $A(3, y_0)$, $y_0 > 0 \Rightarrow 9 + y_0^2 = 25 \Rightarrow y_0 = 4$

$\Rightarrow A(3, 4)$.

$$N: y = \frac{4}{3}x$$

$$T: y = -\frac{3}{4}x + \lambda \;\wedge\; \lambda = y_0 + \frac{3}{4}x_0 = \frac{25}{4},$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$



$$p_1: y = -\frac{3}{4}x \;\wedge\; x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow B(4, -3),$$

ili

$$p_2 \,||\, N : y = \frac{4}{3}x + \alpha \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 25,$$

Iz uslova dodira D = 0 je $x = -\frac{25}{3} \quad \Rightarrow \quad x_T=4 \quad \wedge \quad y = -3 \quad \Rightarrow \quad B(4, -3).$

3. Neka je $z=x+iy$. Tada iz $|z|=2$ slijedi

$$x^2+y^2 = 4.$$

Sada imamo

$$\left|z - \frac{1}{z}\right| =$$

$$= \left|x+iy - \frac{1}{x+iy}\right| = \left|x+iy - \frac{x-iy}{x^2+y^2}\right| =$$

$$= \left|x+iy - \frac{x-iy}{2}\right| = \left|\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}iy\right| = \sqrt{\frac{9}{16}x^2 + \frac{25}{16}y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{16}(4-y)^2 + \frac{25}{16}y^2} = \sqrt{y^2 + \frac{9}{4}}.$$

Prema tome je

$$\min\left\{\left|z - \frac{1}{z}\right| : |z| = 2,\ z \in \mathbf{C}\right\} = \min\left\{\sqrt{y^2 + \frac{9}{4}} : y \in \mathbf{R}\right\} = \frac{3}{2},$$

tj. tražena vrijednost je $\frac{3}{2}$ i dobija se za $y = 0$. Odavde slijedi da je $x = \pm 2$, odnosno najmanja vrijednost datog izraza postiže se za $z = -2$ i $z = 2$.

4. Iz relacije $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$ slijedi:

$$z^2 - 2\cos\alpha \cdot z + 1 = 0,$$

$$\text{tj. } z = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

Primjenom *Moivreove* formule, dobijemo

$$z^n = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos(n\cdot\alpha) \pm i\sin(n\cdot\alpha) = \cos(\pm n\cdot\alpha) + i\sin(\pm n\cdot\alpha),$$

$$1/z^n = z^{-n} = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n} = \cos(n\cdot\alpha) \pm i\sin(-n\cdot\alpha) =$$

$$= \cos(\pm n\cdot\alpha) - i\sin(\pm n\cdot\alpha),$$

a odatle

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\cdot\alpha).$$

5. Stavljajući $z = x + iy$ i kvadriranjem zadanih jednakosti, dobijemo

$$9|x + iy - 12|^2 = 25\,|x + iy - 8i|^2,\ |x + iy - 4|^2 = |x + iy - 8|^2,$$

odnosno (koristeći definiciju modula kompleksnog broja)

$$9\,[(x - 12)^2 + y^2\,] = 25\,[x^2 + (y - 8)^2\,],\ (x - 4)^2 + y^2 = (x - 8)^2 + y^2.\ (*)$$

Iz druge jednačine sistema (*) slijedi

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 16x + 64,$$

odnosno $8x = 48$, tj. $x = 6$, pa zamjenom u prvu jednačinu sistema (*), dobijemo jednačinu

$$y^2 - 25y + 136 = 0,$$

čija su rješenja $y_1 = 8$ i $y_2 = 17$.

Dakle, traženi kompleksni brojevi su $z_1 = 6 + 8\,i$, $z_2 = 6 + 17\,i$.

6. Neka je na turniru sudjelovalo n ekipa. Tada je odigrano ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica, a kako svaka utakmica "vrijedi" 2 boda to je osvojeno ukupno $n\cdot(n-1)$ bodova.

1° Kako broj osvojenih bodova nije manji od $7 + 5 + 3$ vrijedi $n\cdot(n-1) \geq 15$, a odavde dobijemo $n \geq 5$.

2° S druge strane nijedna od preostalih $n-3$ ekipe sudionice turnira nije osvojila više od 3 boda, pa je ukupno na turniru osvojeno najviše $15 + 3\cdot(n - 3)$ bodova, odakle slijedi

$$n\cdot(n-1) \leq 3n + 6 \ \text{(ili } n\cdot(n-4) \leq 6)$$

$$\text{tj. } (n-2)^2 \leq 10 \text{ odnosno } n \leq 5.$$

Iz 1° i 2° slijedi $n=5$.

7. Primjenom kosinusne teoreme dobijemo:

$$t_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2),\ t_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$$

Neka je $\{M\}=t_a\cap t_b$. Tada je

$$AM^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2),\ BM^2 = \frac{1}{9}(2a^2+2c^2-b^2).$$

Primijenimo *Pitagorinu* teoremu na Δ ABM:

$$c^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2) + \frac{1}{9}(2a^2+2c^2-b^2) = \frac{1}{9}(a^2+b^2+4c^2),$$

odakle je $c^2 = \frac{1}{5}(a^2+b^2)$. Ovaj uslov je ekvivalentan sa $t_a \perp t_b$.

Po kosinusnoj teoremi je

$$\cos A\hat{C}B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4}{5}\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq \frac{4}{5}.$$

Dakle, $\cos A\hat{C}B \geq \frac{4}{5}$. S druge strane $\cos A\hat{C}B$ može biti proizvoljno blizu jedinice. Neka je $\frac{4}{5} \leq k < 1$. Dokazaćemo da možemo izabrati a i b tako da bude $\cos A\hat{C}B = k$. Odredićemo a i b tako da bude $\frac{4}{5}\frac{a^2+b^2}{2ab} = k$,

tj. $a^2 - \frac{5}{2}abk + b^2 = 0$.

Odavde je $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}k \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}k\right)^2 - 1}$. Uzimajući trougao kod koga a i b zadovoljavaju ovaj odnos i zaklapaju ugao čiji je kosinus k dobijemo trougao koji ispunjava uslove zadatka, jer je tada:

$$\cos A\hat{C}B = k = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Odavde je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abk = \frac{1}{5}(a^2+b^2) + \frac{4}{5}\underbrace{(a^2+b^2-\frac{5}{2}abk)}_{=0,\ \text{prema izboru a, b}} = \frac{1}{5}(a^2+b^2).$$

Dakle, $c^2 = \frac{1}{5}(a^2+b^2)$, a ovo je ekvivalentno sa $t_a \perp t_b$.

8. a) Polazeći od identiteta $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ i činjenice da je

$$|\sin\alpha| \le |\alpha|$$

dobijemo:

$$|x_2 - x_3| = |\cos x_1 - \cos x_2| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x_2+x_1}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right| \le 2\frac{|x_2-x_1|}{2} = |x_2 - x_1|$$

Dakle, $|x_1 - x_2| \ge |x_2 - x_3|$.

Nastavljajući dalje dobijemo:

$$|x_1 - x_2| \ge |x_2 - x_3| \ge \dots \ge |x_n - x_1| \ge |x_1 - x_2|$$

tj. $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_n - x_1| \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dakle, sistem se svodi na jednu jednačinu $\cos x = x$ čije je rješenje $x \approx 1$.

b) Postupajući isto kao u a) ali polazeći od indentiteta:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dobijemo da je sistem ekvivalentan sa $\sin x = x$, a rješenje ove jednačine je samo $x=0$.

Zadatak se može riješiti i polazeći od $|\sin x| \le |x|$ za $\forall x \in \mathbf{R}$.

Tako dobijamo:

$$|x_1| \ge |\sin x_1| = |x_2| \ge |\sin x_2| = |x_3| \ge \dots \ge |\sin x_n| = |x_1| \text{ tj.}$$

$$|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n| \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n \text{ zbog } \sin(-x) = -\sin x.$$

Dakle, sistem se svodi na jednu jednačinu $\sin x = x$ čije je jedinstveno rješenje $x=0$.

9. Sve podskupove n-elementnog skupa X možemo grupisati u parove $(A, X\setminus A)$, $A \subseteq X$.

Ovakvih parova ima tačno 2^{n-1} i familija F može imati najviše jedan član iz svakog para, tj. familija F nema više od 2^{n-1} članova.

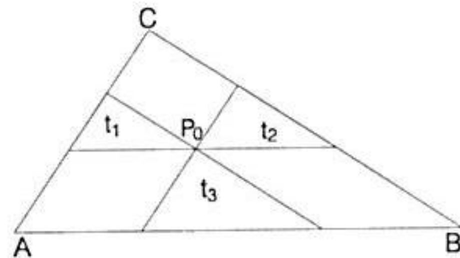
Ako za familiju F uzmemo familiju koja sadrži sve podskupove skupa X koji sadrže neki fiksan elemenat $x \in X$, tada ta familija zadovoljava uslov zadatka i ima tačno 2^{n-1} elemenata.

Dakle familija F može imati najviše 2^{n-1} elemenata.

21. $P_1 : P_2 = K_{1,2}^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{2}{3} = a_1 : a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} a_1$,

$P_1 : P_3 = K_{1,3}^2 = \frac{4}{49} \Rightarrow K_{1,3} = \frac{2}{7} = a_1 : a_3$

$\Rightarrow a_3 = \frac{7}{2} a_1$,



$a = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 (1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}) = 6 a_1$,

$$a : a_1 = 6 = k \Rightarrow P : P_1 = k^2 = 36,$$

$$P = 36 P_1 = 144$$

$$a = a_1 (1 + \frac{m}{\ell} + \frac{n}{\ell}) \qquad (\text{iz } a_2 = \frac{m}{\ell} a_1,\ a_3 = \frac{n}{\ell} a_1)$$

$$a : a_1 = \frac{\ell + m + n}{\ell} = k,$$

$$P = k^2 P_1 = \left(\frac{\ell + m + n}{\ell}\right)^2 \cdot \ell^2$$

$$\Rightarrow \quad P = (\ell + m + n)^2 = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2,$$

$$P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2.$$

22. a) $(k + 1)^3 = k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1$

$$\left.\begin{array}{l} k = 1: \; 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ k = 2: \; 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \vdots \\ k = n: \; (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{array}\right\} \oplus$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 = 1 + 3S_n + 3(1+2+\ldots+n) + n$$

$$\Rightarrow 3S_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1), \; n = 1,2,\ldots$$

b) $a_n - a_{n-1} = 6n^2$:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - a_0 = 6 \cdot 1^2 \\ a_2 - a_1 = 6 \cdot 2^2 \\ \quad\vdots \\ a_n - a_{n-1} = 6 \cdot n^2 \end{array}\right\} \oplus$$

$$\Rightarrow a_n = 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = 6S_n = n(n+1)(2n+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_n}{(n+1)(2n+1)} = n, \quad n = 1,2,\ldots \\ a_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)} = n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

24. Rezultat:

a) $\forall\left(\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]\right)$;

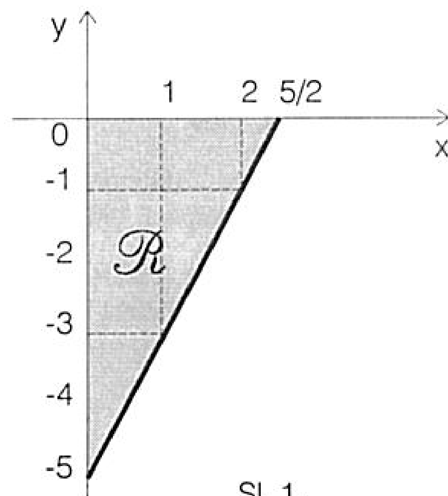
b) Skup rješenja $\mathscr{R}$ je predstavljen na slici 1.

c) $x = 0, y = -5$; $x = 1, y = -3$; $x = 2, y = -1$.

25. Rezultat:

a) jedanaest rukavica;

b) šesnaest rukavica.



Sl. 1.

LITERATURA

[1] Bertolino, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. Đ. Tošić: Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na fakultetima, Beograd, 1970.

[2]* Vene T. Bogosavlov: Zbirka rešenih zadataka iz matematike, II (2) i III (3) r., Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1987 (1989), 1986 (1993).

[3] H. Fatkić, A. Dautović: Zbirka zadataka iz elementarne matematike (za pripremu kvalifikacionih i prijemnih ispita na tehničkim fakultetima i PMF-u), Sarajevo, 1996.

[4]* A. Hodžić: Matematika za I. razred srednje učiteljske i tehničke škole, Ministarstvo obrazovanja, nauke, kulture i sporta FBiH i "OKO", Sarajevo, 1997.

[5] В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Корденски, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, М. И. Сканави: Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы, Москва, 1969.

[6]* I. Katić: Zbirka zadataka iz matematike za I razred srednjih škola, Svjetlost, Sarajevo, 1990.

[7] Matematički časopis za učenike i nastavnike osnovnih i srednjih škola "Triangle", Udruženje matematičara BiH, Sarajevo, 1997, 1998.

[8] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Zbirka zadataka iz matematike za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima, Ekonomski fakultet, Tuzla, 1995, 1997.

[9]* S. Softić: Matematika za III. razred gimnazije, Ministarstvo obrazovanja, nauke, kulture i sporta, FBiH, Sarajevo, 1996.

[10] M. Šnajder, S. Tomić: Metodička zbirka zadataka iz matematike, Svjetlost, Sarajevo, 1986.

[11]* R. Živković: Matematika za drugi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja, Svjetlost, Sarajevo, 1982.

[12]* R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, uputama i rezultatima, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

* Udžbenici i zbirke zadataka čiji su sadržaji i nivoi najbliži sadržajima i ustaljenim zahtjevima kvalifikacionih ispita na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.

Sarajevo, Januar 1998.